RAPPELS

Exercice 1 (Convergences). Soit $\{X_i\}_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1,+1\}$. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}[|X_1+\cdots+X_n|]$ lorsque $n\to\infty$.

Exercice 2 (Classes monotones). Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{M}=\big\{A\in\mathcal{A},\ \mathbb{P}(A)=\mathbb{Q}(A)\big\}$ est une classe monotone.
2. En déduire que si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ coïncident sur un π-système engendreant $\mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}=\mathbb{Q}$.
3. Montrer que la fonction de distribution d'une variable aléatoire réelle caractérise sa loi.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, telles que
$$\forall A\in\mathcal{C},\qquad \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A]=\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A],$$
où $\mathcal{C}$ est un $\pi-$système vérifiant $\Omega\in\mathcal{C}$ et $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}$. Que peut-on conclure ?
5. Soient $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_n$ des $\pi-$systèmes inclus dans $\mathcal{A}$ et contenant l'élément Ω. On suppose que pour tout $(A_1,\ldots,A_n)\in\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n$,
$$\mathbb{P}\left(A_1\cap\cdots\cap A_n\right) \quad=\quad \mathbb{P}\left(A_1\right)\times\cdots\times\mathbb{P}\left(A_n\right).$$
Montrer que les tribus $\sigma(\mathcal{C}_1),\ldots,\sigma(\mathcal{C}_n)$ sont indépendantes.

Exercice 3 (Espérance conditionnelle). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On suppose que presque-sûrement, $\mathbb{E}[X|Y]\leq Y$ et $\mathbb{E}[Y|X]\leq X$.

1. Montrer que presque-sûrement, $X=Y$.
2. Montrer que la conclusion reste valide si X et Y sont seulement supposées intégrables. (On pourra d'abord supposer X,Y positives, et considérer $X\wedge n$ et $Y\wedge n$ pour $n\in\mathbb{N}$.)

Exercice 4 (Calculs gaussiens). Soit $X\sim\mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer $\mathbb{E}[\exp(tX^2)]$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Calculer $\Phi_X(t)=\mathbb{E}[\exp(itX)]$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 5 (Convergence gaussienne). Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables gaussiennes.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les suites $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ et $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ pour que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en loi. Quelle est alors la loi limite ?
2. On suppose maintenant que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilité. Montrer que la convergence a aussitôt lieu dans L^p pour tout $p\geq 1$.

Exercice 6 (Vecteurs aléatoires). Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire.

1. Montrer que la matrice de covariance K_X, lorsque elle existe, est symétrique positive.
2. Montrer que si X est gaussien, alors sa fonction caractéristique peut s'exprimer simplement en fonction de la moyenne $m_X \in \mathbb{R}^d$ et de la matrice de covariance K_X.
3. Soit $A \in \mathbb{M}_{r,d}(\mathbb{R})$ et $m \in \mathbb{R}^d$. Montrer que si X est gaussien alors $Y = AX + m$ l'est aussi.
4. En déduire que pour tout vecteur $m \in \mathbb{R}^d$ et toute matrice symétrique positive $K \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$, il existe un vecteur gaussien Y de moyenne m et covariance K. On note $Y \sim \mathcal{N}(m, K)$.
5. Expliciter, lorsqu'elle existe, la densité de $\mathcal{N}(m, K)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
6. La limite en loi d'une suite de vecteurs gaussiens est-elle nécessairement gaussienne ?
7. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(0, K)$. Calculer $\mathbb{E}[e^{-\frac{{}^tXAX}{2}}]$ pour $A \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ symétrique.

Exercice 7 (Covariance et indépendance).

1. Soit $-1 \leq \theta \leq 1$ et $(X, Y) \sim \mathcal{N}\left(0, \binom{1\theta}{\theta 1}\right)$. On pose $Z = X + Y$ et $W = X - Y$. Quelles sont les lois de Z et W ? Ces deux variables sont-elles indépendantes ?
2. Soient X, U des variables indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $U \sim \mathrm{Unif}\{-1, +1\}$. On pose $Y = UX$. Donner la loi de Y puis calculer $\mathrm{Cov(X, Y)}$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 (Conditionnement gaussien).

1. Soit $(X, Y_1, \ldots, Y_d)$ un vecteur gaussien centré. Montrer que $\mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_d]$ coïncide avec la projection orthogonale de X sur $\mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_d)$, puis que la loi conditionnelle de X sachant $(Y_1, \ldots, Y_d)$ est une gaussienne dont on précisera les paramètres.
2. Soit (X, Y) un vecteur gaussien bi-dimensionnel arbitraire. Expliciter la loi conditionnelle de X sachant Y en fonction des paramètres.

Exercice 9 (Marche aléatoire). Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes uniformes sur $\{-1, +1\}$ et soit $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose $S_0 := 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Vérifier que $\{S_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable et expliciter son crochet.
2. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} \colon S_n = a\}$. Pour $a, b > 0$, calculer $\mathbb{E}[T_{-a} \wedge T_b]$ et $\mathbb{P}\left(T_{-a} < T_b\right)$. En déduire que presque-sûrement, la marche visite tous les sites.

Exercice 10 (Martingales). Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles et $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle. On suppose que $X_0 = 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{Y}_n^{\lambda} := \exp\left(i\lambda X_n + \frac{n\lambda^2}{2}\right).$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{Y_n^{\lambda}\}_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$.

(ii) Il existe des variables aléatoires $\{U_n\}_{n\geq 1}$ IID de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ telles que pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = U_1 + \cdots + U_n.$$