M1 Mathématiques, 2019-2020

MM036 - processus à sauts

Examen de première session du 23 mai

Exercice 1. Des messages arrivent suivant un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$. En moyenne, il arrive 2 messages par minute.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun message n'arrive durant les 2 premières minutes.

2. Quelle est l'espérance du temps d'arrivée du premier message ? du second ?

3. Quelle est la probabilité qu'aucun message ne soit arrivé durant la première minute sachant que 3 messages sont arrivés durant les 3 premières minutes ?

4. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 2 messages durant les 2 premières minutes sachant qu'il y en a eu au moins 1 durant la première minute ?

5. On fixe $0 < s < t$. Pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(N_s = k | N_t = \ell)$.

Exercice 2. Des groupes de clients arrivent suivant un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$, de paramètre $\lambda > 0$, d'instants de saut $0 < T_1 < T_2 < \ldots$. Le i-ème groupe est constitué de X_i clients. On suppose les X_i i.i.d., indépendants, de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (i.e. $\mathbb{P}(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour $k \geq 1$). On suppose que $(N_t)_{t\geq 0}$ est indépendant de $(X_i)_{i\geq 1}$.

1. Que peut-on dire de la famille $(T_i, X_i)_{i\geq 1}$?

2. Soit Z_t le nombre de clients arrivés avant l'instant $t \geq 0$. Calculer $\mathbb{E}[\exp(-\alpha Z_t)]$ pour $\alpha > 0$.

3. Si chaque client reste dans le système pendant une durée 1, exprimer R_t le nombre de clients présents à l'instant $t > 0$ en fonction de Z_t puis calculer $P(R_t = 0)$.

4. Montrer que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un P.A.I.S. On pourra exprimer Z_t en fonction de la fonction de comptage M associée à $(T_i, X_i)_{i\geq 1}$.

Exercice 3. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, de matrice de transition P définie par $P(i, i-1) = 1$ pour tout $i \geq 1$ et $P(0, k) = p_k$, pour une famille $(p_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs de somme 1.

1. Dessiner le graphe de la chaîne.

2. Sous quelle condition la chaîne est-elle irréductible ?

Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.

3. Calculer la loi du temps de retour R_0 en 0 partant de 0.

4. Montrer que l'état 0 est récurrent.

5. (i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'état 0 soit récurrent positif.
(ii) Dans ce cas, soit $(\pi_k)_{k\geq 0}$ sa probabilité invariante. Calculer π_0.
(iii) Déterminer π_k, pour tout $k \geq 0$, par récurrence.
(iv) La probabilité π est elle P-réversible ?

Exercice 4. Des clients arrivent à une caisse (unique) suivant un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$. Les temps de services sont supposés i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et indépendants du processus de Poisson.

Si un client trouve la caisse libre, il y va. Si la caisse est occupée mais que personne n'attend, il attend. Si par contre il y a déjà deux clients sur place (un à la caisse et un en train d'attendre), il abandonne et repart aussitôt.

On note X_t le nombre de clients présents dans le système (caisse et file) à l'instant t.

1. Expliquer littéralement pourquoi $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus markovien de sauts (à valeurs dans $E = \{0, 1, 2\}$).

2. Calculer rigoureusement ses taux d'évenement λ_i, sa matrice de transition $Q(i, j)$.

3. Soit $P_t(i, j) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$. Ecrire les équations de Kolmogorov forward.

4. Montrer que $\frac{d}{dt}\mathbb{E}_i[X_t] = \alpha(P_t(i, 0) + P_t(i, 1)) - \mu(P_t(i, 1) + P_t(i, 2))$ (pour tout $i \in E$).

Exercice 5. Sans aucune justification, donner l'espace d'états, les taux d'évenement et la matrice transition du PMS $(X_t)_{t\geq 0}$ suivant: X_t est le nombre d'individus présents (et vivants) à l'instant t dans une population où :

• chaque individu a une durée de vie de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ et est remplacé à l'instant de sa mort par 0 ou 4 individus avec probabilités respectives $p_0 > 0$ et $p_4 > 0$ (avec bien sûr $p_0 + p_4 = 1$),

• des individus immigrent dans le système suivant un processus de Poisson de paramètre $\theta > 0$.