M1 Mathématiques, 2018-2019
MM036 - processus à sauts
Examen de première session

Documents, calculettes, téléphones interdits. Durée 2 heures.

Exercice 1. On considère une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de v.a. réelles i.i.d. de loi μ (sur $\mathbb{R}$), ainsi qu'une v.a. N de loi de Poisson de paramètre λ (indépendante de la famille $(X_i)_{i\geq 1}$). On n'utilisera pas les résultats du cours dans cet exercice.

1. Soient A et B deux boréliens disjoints de $\mathbb{R}$. Montrer que les v.a. $M(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{X_i \in A\}}$ et $M(B) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}}$ sont indépendantes, de lois respectives Poisson($\lambda\mu(A)$) et Poisson($\lambda\mu(B)$).

2. Soient C et D deux boréliens de $\mathbb{R}$ tels que $C \subset D$. En utilisant la question 1, calculer $P(M(C) = k\,|M(D) = n)$ pour $n \geq k$.

Exercice 2. Un pêcheur attrape des poissons aux instants de sauts $0 < T_1 < T_2 < ...$ d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de paramètre $\alpha > 0$. On note M_i la masse du i-ème poisson attrapé et $X_i = 1$ si c'est une truite et 0 si c'est un vairon. On suppose que M_i suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Tous les objets aléatoires ci-dessus sont mutuellement indépendants.

1. Que peut-on dire la famille $(T_i, M_i, X_i)_{i\geq 1}$ (d'après le cours) ? On note π sa fonction de comptage.

2. Soit Z_t le nombre de truites pêchées avant l'instant t. Exprimer Z_t en fonction de π et donner sa loi.

3. Soit L_t la masse totale des truites pêchées avant l'instant t.
(a) Exprimer L_t en fonction du processus $(T_i, M_i, X_i)_{i\geq 1}$.
(b) En utilisant une formule du cours, calculer $\mathbb{E}[\exp(-\gamma L_t)]$ (avec $\gamma \geq 0$).

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable E, de matrice de transition P. Montrer très soigneusement que pour tout $n \geq 1$, tout i, j dans E,

$$\mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(\tau_j = k) P^{n-k}(j, j),$$

où $\tau_j = \inf\{n \geq 1 \ :\ X_n = j\}$.

Exercice 4. Soient $p \in]0, 1[$, $\mu > 0$ et $\beta > 0$. On considère une population d'individus. Chaque individu a une durée de vie de loi exponentielle de paramètre μ. Chaque individu est remplacé, à l'instant de sa mort, par 0 (avec probabilité $1-p$) ou 2 (avec probabilité p) individus. D'autre part, des individus immigrent dans le système suivant un processus de Poisson de paramètre β. Toutes les v.a. intervenant dans le processus sont indépendantes. On appelle X_t le nombre d'individus présents (vivants) à l'instant t.

1. Expliquer littéralement pourquoi $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus markovien de saut, donner son espace d'états.

2. Montrer que ses taux d'évènements et sa matrice de transition sont donnés par $\lambda(i) = \beta + i\mu$ et $Q(i, i+1) = (\beta + i\mu p)/\lambda(i)$ et $Q(i, i-1) = i\mu(1-p)/\lambda(i)$.

3. Le processus est-il irréductible ?

4. Soit $P_t(i, j) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$. Écrire les équations de Kolmogorov Forward pour ce PMS.

5. En déduire que pour tout $i \geq 0$, (on ne justifiera pas la dérivation sous le signe somme),

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}_i[X_t] = \beta + \mu(2p-1)\mathbb{E}_i[X_t].$$

6. En déduire la valeur de $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_i[X_t]$ (distinguer plusieurs cas).

7. En déduire que le processus est récurrent si $p < 1/2$.