2018 - 2019, Session 1

$\boxed{\text{ex } 1}$

(1) Soient k et $\ell \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[\Pi(A)=k, \Pi(B)=\ell] = \sum_{n \geq k+\ell} \mathbb{P}\left[N=n, \begin{array}{l} k \text{ indices parmi } \{1,\dots,n\} \text{ vérifient } X_i \in A \\ \text{et } \ell \text{ indices parmi } \{1,\dots,n\} \text{ vérifient } X_i \in B \end{array}\right]$$

$$= \sum_{n \geq k+\ell} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} C_n^k \mu(A)^k C_{n-k}^\ell \mu(B)^\ell (1-\mu(A)-\mu(B))^{n-k-\ell}$$

$$= e^{-\lambda} (\lambda\mu(A))^k (\lambda\mu(B))^\ell \sum_{n \geq k+\ell} [\lambda(1-\mu(A)-\mu(B))]^{n-k-\ell} \frac{1}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{k!\cancel{(n-k)!}} \frac{\cancel{(n-k)!}}{\ell!(n-k-\ell)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda\mu(A))^k}{k!} \frac{(\lambda\mu(B))^\ell}{\ell!} e^{\lambda(1-\mu(A)-\mu(B))}$$

$$= e^{-\lambda\mu(A)} \frac{(\lambda\mu(A))^k}{k!} \frac{(\lambda\mu(B))^\ell}{\ell!} \quad \text{comme souhaité !}$$

(2) On a $\Pi(C) \leq \Pi(D)$, donc bien sûr, $\mathbb{P}[\Pi(C)=k \mid \Pi(D)=n]=0$ si $k>n$.

Si $k \leq n$, comme C et $D \setminus C$ sont disjoints, on a, par (1),

$$\mathbb{P}[\Pi(C)=k \mid \Pi(D)=n] = \frac{\mathbb{P}[\Pi(C)=k \text{ et } \Pi(D\setminus C)=n-k]}{\mathbb{P}[\Pi(D)=n]}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\mu(C)} \frac{(\lambda\mu(C))^k}{k!} \times e^{-\lambda\mu(D\setminus C)} \frac{(\lambda\mu(D\setminus C))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda\mu(D)} \frac{(\lambda\mu(D))^n}{n!}}$$

$$= C_n^k \frac{\mu(C)^k \mu(D\setminus C)^{n-k}}{\mu(D)^n}.$$

Exercice 2 :

1. La famille $(T_i, M_i, X_i)_{i \geq 1}$ est un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1] \times \{0,1\}$ d'intensité $\alpha \, dt \, dm \left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)(dx)$, par le cours.

2. $Z_t = \Pi\left([0,t] \times [0,1] \times \{1\}\right)$, donc, $Z_t \sim \mathcal{P}(\lambda_t)$,

$$\text{où } \lambda_t = \int_0^t \int_0^1 \int_{\{1\}} \alpha \, ds \, dm \left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)(dx) = \frac{\alpha t}{2}.$$

3. $$L_t = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{T_i \leq t, X_i = 1} M_i = \sum_{i \geq 1} f(T_i, M_i, X_i),$$

$$\text{où } f(s,m,x) = m \mathbb{1}_{s \leq t} \mathbb{1}_{x=1}.$$

Par le cours, $$\mathbb{E}\left[e^{-\gamma L_t}\right] = \exp\left(-\alpha \int_0^\infty \int_0^1 \int_{\{0,1\}} \left(1 - e^{-\gamma f(s,x,m)}\right) ds \, dm \left(\tfrac{1}{2}\delta_0 + \tfrac{1}{2}\delta_1\right)(dx)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t \int_0^1 \left(1 - e^{-\gamma m}\right) dm\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\left(1 - \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma}\right)\right)$$

ex 3 :

On a $\{X_n = j\} = \{X_n = j, \tau_j \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_n = j, \tau_j = k\}$,

donc $\mathbb{P}_1(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_1(\tau_j = k, X_n = j) = \cancel{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_1[\mathbb{1}_{\tau_j = k} \mathbb{P}_1(X_n = j)]}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{\tau_j = k} \, \mathbb{P}_1[X_n = j \mid \mathcal{F}_k]\right]$$

car $\{\tau_j = k\} = \{X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j\} \in \mathcal{F}_k$.

Or, par Markov simple, $\mathbb{P}_1[X_n = j \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{P}_{X_k}(X_{n-k} = j) = P^{n-k}(X_k, j)$.

Ainsi, $\mathbb{P}_1(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{\tau_j = k} \, P^{n-k}(X_k, j)\right]$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_1[\tau_j = k] \, P^{n-k}(j, j)$$

car sur $\tau_j = k$, on a $X_k = j$.

ex 4

1. Sachant toute la trajectoire $(X_s)_{s\leq t}$, on voit que,

si $X_t = i$:

→ 1 individu est en train d'arriver (immigrer), et on sait depuis combien de temps on l'attend, mais, comme la loi $\mathcal{E}(\beta)$ est sans mémoire, on l'attendra encore un délai $\sim \mathcal{E}(\beta)$.

→ les i individus attendent leurs morts, et on sait depuis combien de temps (pour chacun), mais comme $\mathcal{E}(\mu)$ est sans mémoire, ils attendront encore chacun une $\mathcal{E}(\mu)$ avant de mourir.

Ainsi, l'avenir ne dépend de $(X_s)_{s\leq t}$ que par la valeur de X_t, c'est donc un PDS.

L'espace d'états est bien sûr $E = \mathbb{N}$.

2. Soit $i \in \mathbb{N}$. (5)

Si $X_0 = i$, soit $S_1 \sim \mathcal{E}(\beta)$ le tps d'arrivée du prochain migrant

et soit $R_1, \dots, R_i$ les tps de morts des i indiv présents

qui sont iid $\sim \mathcal{E}(\mu)$.

On a $T_1 = \min\{S_1, R_1, \dots, R_i\} \sim \mathcal{E}(\beta + i\mu)$

Donc $\lambda(i) = \beta + i\mu$.

De plus,

$X_{T_1} = i+1$ si $S_1 < \min\{R_1, \dots, R_i\}$ $\left(\text{proba } \frac{\beta}{\lambda(i)}\right)$

ou si $\min\{R_1, \dots, R_i\} < S_1$ et l'indiv qui

meurt est replacé par 2 indiv

$\left(\text{proba } \frac{i\mu}{\lambda(i)} \times p\right)$

Donc $Q(i, i+1) = \dfrac{\beta + i\mu p}{\lambda(i)}$

et $X_{T_1} = i-1$ si $\min\{R_1, \dots, R_i\} < S_1$ et l'indiv

qui meurt est remplacé par 0 indiv.

$\left(\text{proba } \frac{i\mu}{\lambda(i)} \times (1-p)\right)$.

Donc $Q(i, i-1) = \frac{i\mu(1-p)}{\lambda(i)}$

3. Le PMS est bien sûr irred, puisque
$Q(i, i+1) > 0 \quad \forall i \geq 0$ et
$Q(i, i-1) > 0 \quad \forall i \geq 1$.

4. Par Kolmogorov forward, on a, si $j \geq 1$

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) = -\lambda(j)\, P_t(i,j) + \lambda(j-1)\, Q(j-1,j)\, P_t(i,j-1) + \lambda(j+1)\, Q(j+1,j)\, P_t(i,j+1)$$

$$= -(\beta + j\mu)\, P_t(i,j) + (\beta + (j-1)\mu p)\, P_t(i,j-1) + (j+1)\mu(1-p)\, P_t(i,j+1)$$

Pour $j=0$,

$$\frac{d}{dt} P_t(i,0) = -\lambda(0)\, P_t(i,0) + \lambda(1)\, Q(1,0)\, P_t(i,1)$$
$$= -\beta\, P_t(i,0) + \mu(1-p)\, P_t(i,1)$$

5. $\quad$ 7

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}_1[X_t] = \frac{d}{dt}\sum_{j\geq 0} j\, P_t(i,j) = \frac{d}{dt}\sum_{j\geq 1} j\, P_t(i,j)$$

$$= -\sum_{j\geq 1}(\beta + j\mu)\, j\, P_t(i,j)$$

$$+ \sum_{j\geq 0}(\beta + (j-1)\mu p)\, j\, P_t(i,j-1)$$

$$+ \sum_{j\geq 1}(j+1)\mu(1-p)\, j\, P_t(i,j+1)$$

$$= -\sum_{j\geq 1}(\beta j + \mu j^2)\, P_t(i,j)$$

$$+ \sum_{j\geq 1}(\beta + j\mu p)(j+1)\, P_t(i,j)$$

$$+ \sum_{j\geq 1} j\mu(1-p)(j-1)\, P_t(i,j)$$

$$= \sum_{j\geq 1} P_t(i,j)\left[\begin{array}{l} -\cancel{\beta j} - \cancel{\mu j^2} + \cancel{\beta j} + \beta \\ + \cancel{j^2\mu p} + j\mu p \\ + \cancel{j^2\mu(1-p)} - j\mu(1-p) \end{array}\right]$$

$$= \beta + \mu(2p-1)\,\mathbb{E}_1[X_t].$$

6. • Si $p \geq 1/2$, on en déduit que

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}_i[X_t] \geq \beta, \text{ donc}$$

$$\mathbb{E}_i[X_t] \geq i + \beta t \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty .$$

• Si $p < 1/2$, on résoud l'equa diff, et on trouve que $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbb{E}_i[X_t] = \dfrac{\beta}{\mu(1-2p)} < +\infty$.

7. Donc si $p < 1/2$, $\mathbb{E}_i[X_t]$ est bornée sur $[0, +\infty[$. Il est donc impossible que $X_t \xrightarrow{t \to \infty} +\infty$ p.s. (à vérifier !)
Ainsi, le PNS est récurrent.