M2 PROBABILITÉS ET APPLICATIONS
CALCUL STOCHASTIQUE ET PROCESSUS DE DIFFUSION
EXAMEN DU 22 JANVIER 2020. DURÉE 3 HEURES.

Calculettes et téléphones interdits. Documents autorisés : une copie double manuscrite.

Question de cours. Rappeler le théorème de Dubins-Schwarz. Le démontrer dans le cas simplifié où $t \to \langle M \rangle_t$ est p.s. strictement croissant et tend p.s. vers l'infini quand $t \to \infty$.

Exercice 1. Soit M une martingale locale continue M issue de 0 telle que $\langle M \rangle_\infty = \infty$ p.s. Montrer que $\sigma_x = \inf\{t \geq 0 : M_t = x\}$ est fini p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\mathbb{P}(\sigma_a < \sigma_b) = \frac{b}{b-a}$ pour $a < 0 < b$.

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.
(a) Montrer que pour tout $T > 0$,
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{[0,T]} |B_t| < 2\Big) > 0.$$
(b) En déduire que pour tout $T > 0$, tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{[0,T]} |B_t| < \varepsilon\Big) > 0.$$

Exercice 3. Théorème de comparaison pour les EDS. Soit σ, b et $\tilde{b}$ trois fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de constante de Lipschitz L. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $b(x) \leq \tilde{b}(x)$. On considère deux réels $x_0 \leq \tilde{x}_0$ ainsi que les solutions (uniques) $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ à $E_{x_0}(\sigma, b)$ et $E_{\tilde{x}_0}(\sigma, \tilde{b})$, conduites par un même mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. On se propose de montrer que p.s.,
$$\forall\, t \geq 0, \quad X_t \leq \tilde{X}_t.$$
(a) Montrer que pour tout $p \geq 2$, tout $T > 0$, on a
$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p] < \infty.$$
On pourra introduire $\tau_k = \inf\{t > 0 : |X_t| \geq k\}$, *utiliser que* $|x + y + z|^p \leq 3^{p-1}(|x|^p + |y|^p + |z|^p)$, *les inégalités de BDG et de Hölder, que* $|b(x)| + |\sigma(x)| \leq C(1 + |x|)$ *et le lemme de Gronwall, pour montrer que* $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X_{t\wedge\tau_k}|^p] \leq C_{p,T}$ *pour une constante* $C_{p,T}$ *ne dépendant pas de* k*, et conclure.*
(b) Soit $\varphi(x) = (\max\{0, x\})^3$. Observer que φ est C^2 sur $\mathbb{R}$, calculer φ' et φ'' et montrer que
$$\forall\, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x - \tilde{x})[b(x) - \tilde{b}(\tilde{x})] + \frac{1}{2}\varphi''(x - \tilde{x})[\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})]^2 \leq C\varphi(x - \tilde{x}),$$
pour une certaine constante $C > 0$.
(c) En utilisant la formule d'Itô, exprimer $\mathbb{E}[\varphi(X_t - \tilde{X}_t)]$, en justifiant à l'aide de (a).
(d) En déduire que $\mathbb{E}[\varphi(X_t - \tilde{X}_t)] = 0$ pour tout $t \geq 0$ et conclure.

Exercice 4. On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ et deux fonctions mesurables σ et b de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe trois constantes $\sigma_1 > \sigma_0 > 0$ et $b_1 > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1 \quad \text{et} \quad |b(x)| \leq b_1.$$

1. (a) On considère un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. On pose $A_t = \int_0^t [\sigma(x_0 + W_s)]^{-2} \mathrm{d}s$, qui est strictement croissante et tend vers l'infini, et admet donc une fonction réciproque τ_t. Montrer que pour tout $t \geq 0$, τ_t est un $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$-temps d'arrêt borné. On introduit la filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$.

(b) Montrer que $X_t = x_0 + W_{\tau_t}$ est une $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$-martingale de crochet τ_t.

(c) Montrer que $B_t = \int_0^t [\sigma(X_s)]^{-1} \mathrm{d}X_s$ est un $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien.

(d) Conclure que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de $E_{x_0}(\sigma, b \equiv 0)$. On précisera dans quel espace de probabilités (filtré) et pour quel mouvement brownien.

2. Soit $T > 0$ fixé. En utilisant le théorème de Girsanov, montrer que $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est une solution de $E_{x_0}(\sigma, b)$, sur un espace de probabilités (filtré) à préciser et pour un mouvement brownien à préciser.

Exercice 5. Temps local du mouvement brownien. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension 1, issu de 0, et $X_t = |B_t|$.

On cherche à montrer qu'il existe un processus croissant (continu adapté) $(L_t)_{t\geq 0}$, appelé temps local, tel que p.s., pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sg}(B_s)\mathrm{d}B_s + L_t \quad \text{et} \quad \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > 0\}} \mathrm{d}L_s = 0.$$

où $\mathrm{sg}(x) = \mathbf{1}_{\{x>0\}} - \mathbf{1}_{\{x<0\}}$ et que de plus,

$$\max\{B_t, 0\} = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2} L_t.$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon^2 + x^2}$. Montrer que

$$\varphi_\varepsilon(B_t) = \varepsilon + M_t^\varepsilon + L_t^\varepsilon,$$

où $(M_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ est une martingale et $(L_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ est un processus croissant.

(b) Soit $T > 0$. Montrer que $\sup_{[0,T]} |\varphi_\varepsilon(B_t) - X_t| \to 0$ et $\sup_{[0,T]} |M_t^\varepsilon - \int_0^t \mathrm{sg}(B_s)\mathrm{d}B_s| \to 0$ en probabilité.

(c) En déduire que $L_t = X_t - \int_0^t \mathrm{sg}(B_s)\mathrm{d}B_s$ est un processus croissant (continu et adapté).

(d) Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s>0\}} \mathrm{d}L_s = 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$.

(e) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\max\{B_t, 0\} = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s>0\}} \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2} L_t$.

(f) En déduire une formule similaire pour $\max\{-B_t, 0\}$.