M2 "Probabilités et Modèles Aléatoires" Paris VI *Année 2015 – 2016*
"Calcul stochastique et processus de diffusion" (L. Zambotti)

Chapitre VI. Formule d'Itô et applications

Exercice 1. Soient X et Y deux $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens réels indépendants, et soit H un processus progressif. On pose

$$\begin{aligned}\beta_t &= \int_0^t \cos(H_s)\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t \sin(H_s)\,\mathrm{d}Y_s,\\ \gamma_t &= \int_0^t \sin(H_s)\,\mathrm{d}X_s - \int_0^t \cos(H_s)\,\mathrm{d}Y_s\,.\end{aligned}$$

Montrer que β et γ sont des $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens indépendants.

Exercice 2. (intégrale de Stratonovich). Soient X et Y deux semimartingales continues. L'intégrale de Stratonovich $\int_0^\bullet Y \circ \mathrm{d}X$ est définie par

$$\int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s := \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\,\langle X,\, Y\rangle_t\,.$$

(i) Montrer que pour tout $t > 0$ et toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0,\, t]$ dont le pas tend vers 0,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} \frac{Y_{t_{i+1}^n} + Y_{t_i^n}}{2}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s \qquad \text{en probabilité.}$$

(ii) Montrer que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3, alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ \mathrm{d}X_s.$$

Exercice 3. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien. Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s=0\}}\,\mathrm{d}B_s = 0$.

Exercice 4. On note $\mathbb{P}^x$ la loi du mouvement brownien $(B_t,\ t \ge 0)$ issu de $x > 0$, et on pose $\tau := \inf\{t \ge 0 :\ B_t = 0\}$. Soit $f :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue à support compact. Calculer $\mathbb{E}^x(\int_0^\tau f(B_s)\,\mathrm{d}s)$.

Exercice 5. Soit $Z = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0. On pose $\tau := \inf\{t :\ |Y_t| \ge \frac{\pi}{2}\}$. À l'aide de la martingale e^Z, déterminer la loi de X_τ.

Exercice 6. (i) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to]0, \infty[$ une fonction de classe C^2 telle que $f'' = 2gf$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(0) = 1$, $f'(1) = 0$. On pose

$$u(t) := \frac{f'(t)}{2f(t)}, \qquad t \ge 0.$$

Montrer que $u' + 2u^2 = g$ sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit β un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel standard. Soient $x_0 \geq 0$ et $a \geq 0$ des réels positifs. Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, tel que

$$X_t = x_0 + 2 \int_0^t \sqrt{X_s}\, \mathrm{d}\beta_s + at.$$

Montrer que $u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s \,\mathrm{d}s = u(0)x_0 + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}X_s - 2\int_0^t u(s)^2 X_s \,\mathrm{d}s$, $t \geq 0$.

(iii) Posons $M_t := u(0)x_0 + 2\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\,\mathrm{d}\beta_s$, $t \geq 0$. Montrer que

$$f(t)^{-a/2} \exp\Big(u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s \,\mathrm{d}s\Big) = \mathscr{E}(M)_t.$$

(iv) Montrer que f est décroissante sur $[0,\,1]$. Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\int_0^1 g(s)X_s\,\mathrm{d}s\Big)\Big] = f(1)^{a/2}\mathrm{e}^{x_0 f'(0)/2}.$$

(v) Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 X_s\,\mathrm{d}s\Big)\Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{a/2}}\exp\Big(-\frac{x_0}{2}\,\theta\mathrm{th}\theta\Big), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

(vi) Soit B un mouvement brownien réel standard. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 (B_s + x)^2\,\mathrm{d}s\Big)\Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{1/2}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\,\theta\mathrm{th}\theta\Big), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

(vii) Soient B et $\widetilde{B}$ des mouvements browniens réels standard indépendants. Montrer que pour tout $t > 0$ fixé, $\inf\{s \geq 0 :\, |B_s| = t\}$ et $\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s + \int_0^t \widetilde{B}_s^2\,\mathrm{d}s$ ont la même loi.

Exercice 7. Soit $(B_t,\ t \in [0,1])$ un mouvement brownien issu de 0, et soit $(\mathscr{F}_t,\ t \in [0,1])$ (l'augmentation habituelle de) la tribu canonique de B. On se donne $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée, et on pose $M_t := \mathbb{E}[\,f(B_1)\,|\,\mathscr{F}_t]$, $t \in [0,1]$. Écrire explicitement une constante c et un processus progressif H tels que $M_t = c + \int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s$.

Exercice 8. (troisième identité de Wald). Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard, et soit τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau/2}) < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[\exp(B_\tau - \frac{\tau}{2})] = 1$.

Exercice 9. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, et soit $S_t := \sup_{s\in[0,\,t]} B_s$. On pose $X_t := S_t - B_t$.

(i) Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_u \neq 0\}}\,\mathrm{d}S_u = 0$.

(ii) Montrer que $Y_t := X_t^2 - t$ est une (vraie) martingale.

(iii) Soit $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ X_t = 1\}$. Calculer $\mathbb{E}(\tau)$.

Exercice 10. Soit B un mouvement brownien issu de 0.

(i) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_\infty$ telle que pour tout t, $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_t} = \mathrm{e}^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} \bullet \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}$. Soit τ un temps d'arrêt fini $\mathbb{P}$-p.s. Montrer que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}] = 1$ si et seulement si $\tau < \infty$ $\mathbb{Q}$-p.s.

(ii) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ des réels tels que $\gamma a \geq 0$. Si $\tau_a^{(\gamma)} := \inf\{t \geq 0 :\ B_t + \gamma t = a\}$, alors pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda \tau_a^{(\gamma)}}] = \mathrm{e}^{\gamma a - \sqrt{(\gamma^2 + 2\lambda)a^2}}$.

Exercice 11. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard, et soit H un processus progressif. On suppose qu'il existe des constantes $0 < c \le C < \infty$ telles que $c \le H_t(\omega) \le C$ pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, on a

$$\exp\Big(\frac{c^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big) \le \mathbb{E}\Big\{\exp\Big(\int_0^\infty f(t)H_t\,\mathrm{d}B_t\Big)\Big\} \le \exp\Big(\frac{C^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Exercice 12. Soit B un mouvement brownien issu de 0, et soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On pose $\tau := \inf\{t \ge 0 : |B_t + \gamma t| = 1\}$. Montrer que $B_\tau + \gamma_\tau$ et τ sont indépendantes.

Exercice 13. Soit B un mouvement brownien standard, et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $b := \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t < \infty$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |B_t + f(t)| \le x\Big) \le \mathrm{e}^{ax-(b/2)}\,\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |B_t| \le x\Big),$$

où $a := |f'(1)| + \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel standard. Soit U une variable aléatoire réelle $\mathscr{F}_1$-mesurable indépendante de B telle que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{aU}) < \infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$. On pose $f(t,x) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{xU - tU^2/2})$, $g(t,x) := \mathbb{E}(U\mathrm{e}^{xU-tU^2/2})$ et $h(t,x) := \frac{g(t,x)}{f(t,x)}$.

(i) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_1$ définie par $\mathbb{Q} := f(1, B_1) \bullet \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_1}$. Montrer que $B_t - \int_0^t h(s, B_s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,1]$, est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

(ii) On pose $\xi_t := B_t + tU$, $t \in [0,1]$. Montrer que pour toute $F : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}\Big\{F(\xi_t,\ t \in [0,1])\Big\} = \mathbb{E}\Big\{f(1, B_1)F(B_t,\ t \in [0,1])\Big\}.$$

En déduire que $\xi_t - \int_0^t h(s, \xi_s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,1]$, est un $\mathbb{P}$-mouvement brownien.

(iii) Soit $\mathscr{G} := \sigma(\xi_t,\ t \in [0,1])$. Calculer $\mathbb{E}(U \,|\, \mathscr{G})$.

(iv) Définissons la probabilité $\widetilde{\mathbb{Q}}$ sur $\mathscr{F}_1$ par $\widetilde{\mathbb{Q}} := \mathrm{e}^{-UB_1 - U^2/2} \bullet \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_1}$. Montrer que sous $\widetilde{\mathbb{Q}}$, $(\xi_t,\ t \in [0,1])$ et U sont indépendants, et que la loi de U est la même sous $\mathbb{P}$ et sous $\widetilde{\mathbb{Q}}$.