M2 “Probabilités et Modèles Aléatoires” Paris VI *Année 2015 – 2016*
“Calcul stochastique et processus de diffusion” (L. Zambotti)

Chapitre V. Intégrale stochastique

Exercice 1 (Intégrale de Wiener) Soit H un espace d'Hilbert séparable, $(e_k)_k$ une base hilbertienne de H et $(\xi_k)_k$ une suite iid définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ telle que $\xi_k \sim \mathscr{N}(0,1)$. On définit pour tout $h \in H$

$$W^n(h) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \, \langle e_k, h \rangle_H, \qquad n \geq 1.$$

1. Montrer que $W^n(h)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une v.a. $W(h)$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $W(h) \sim \mathscr{N}(0, \|h\|_H^2)$ et $\mathbb{E}(W(h_1)W(h_2)) = \langle h_1, h_2 \rangle_H$. L'application $H \ni h \mapsto W(h)$ est une immersion isométrique de H dans un sous-espace de variables gaussiennes dans $L^2(\Omega)$.
3. Soit $H = L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. On rappelle que dans le Théorème 1.2.7 du polycopié nous avons construit $W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ et nous l'avons appelé B_t. Par analogie avec cette notation nous notons
$$\int_{\mathbb{R}_+} h_u \, dB_u := W(h), \qquad h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt),$$
et nous appelons cette variable l'intégrale de Wiener de h.

   Soit $E_n \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E := \cup_n E_n$. Si $|E| < +\infty$, $|E|$ est la mesure de Lebesgue de E, montrer que $W(\mathbb{1}_E) = \sum_n W(\mathbb{1}_{E_n})$, où la série converge dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 2 (Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck) Soit $\lambda > 0$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut construire un processus $(X_t, t \geq 0)$ p.s. continu et solution de

$$X_t = x - \lambda \int_0^t X_s \, \mathrm{d}s + B_t, \qquad t \geq 0. \tag{0.1}$$

1. Appliquer la formule d'intégration par parties à $(e^{\lambda t} X_t)_{t \geq 0}$ pour obtenir une expression explicite pour $(X_t)_{t \geq 0}$. En déduire existence et unicité de solutions de (0.1).
2. Montrer que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien et que la loi de X_t est gaussienne de moyenne $e^{-\lambda t} x$ et variance $\frac{(1 - e^{-2\lambda t})}{2\lambda}$ pour tout $t \geq 0$.

3. Pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R})$ soit

$$P_t f(x) := \int f(y) \, \mathscr{N}\left(e^{-\lambda t} x, \frac{(1-e^{-2\lambda t})}{2\lambda}\right), \qquad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $P_t P_s = P_{t+s}$. En prenant la limite $s \to +\infty$, montrer que, si $\mu := \mathscr{N}(0, (2\lambda)^{-1})$, alors

$$\int P_t f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

4. Soit $B_t := W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ un mouvement brownien construit comme dans l'exercice 1. Soit $t \geq 0$ et $f^t(s) := \exp(-\lambda(t-s))\mathbb{1}_{[0,t]}(s)$. Montrer que p.s. $X_t = e^{-\lambda t} x + W(f^t)$.

Exercice 3 (Le pont brownien) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On veut construire un processus $(X_t, t \in [0,1])$ p.s. continu et solution de

$$X_t = -\int_0^t \frac{X_s}{1-s} \, \mathrm{d}s + B_t, \qquad t \in [0,1]. \tag{0.2}$$

1. Appliquer la formule d'intégration par partie à $(\frac{X_t}{1-t})_{t\in[0,1[}$ et obtenir une expression explicite pour $(X_t, t \in [0,1[)$.
2. Montrer que $(X_t, t \in [0,1[)$ a même loi que le pont brownien $(b_t, t \in [0,1[)$ où $b_t := B_t - tB_1$ et en déduire que p.s. $X_t \to X_1 := 0$ si $t \to 1$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Avec les mêmes arguments, montrer que la seule solution de l'équation

$$X_t^y = -\int_0^t \frac{X_s^y - y}{1-s} \, \mathrm{d}s + B_t, \qquad t \in [0,1], \tag{0.3}$$

a même loi que $(b_t^y, t \in [0,1])$, où $b_t^y := B_t - tB_1 + ty$, $t \in [0,1]$.

4. Montrer que $(b_t^y, t \in [0,1])$ est indépendant de B_1. En déduire que pour tous $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ la loi de $(b_{t_1}^y, \ldots, b_{t_n}^y)$ est

$$\frac{p_{t_1}(x_1)\, p_{t_2-t_2}(x_2-x_1) \cdots p_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})\, p_{1-t_n}(y-x_n)}{p_1(y)} \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

où $p_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

5. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ et $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}((B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \in A, B_1 \in E) = \int_E p_1(y)\, \mathbb{P}((b_{t_1}^y, \ldots, b_{t_n}^y) \in A) \, \mathrm{d}y.$$

Donc la loi de $(b_t^y, t \in [0,1])$ donne une version de la loi conditionnelle de $(B_t, t \in [0,1])$ sachant $\{B_1 = y\}$ (où l'on remarque que $\mathbb{P}(B_1 = y) = 0$).