**M2 "Probabilités et Modèles Aléatoires" Paris VI** *Année 2015 – 2016*
**"Calcul stochastique et processus de diffusion"** (L. Zambotti)

**Exercice 1** Dans cet exercice $(\mathscr{F}_t)$ est une filtration et $\tau, \sigma$ sont des $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. On rappelle les définitions

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \ \forall t \geq 0, \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

$$\mathscr{F}_{\tau+} := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \ \forall t \geq 0, \ A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

(i) Si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.

(ii) $\sigma \wedge \tau$ et $\sigma \vee \tau$ sont des temps d'arrêt, et on a $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$. En plus, $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ et $\{\sigma = \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ (et donc $\{\sigma < \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$).

(iii) Si $\sigma$ et $\tau$ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma + \tau$ est un temps d'arrêt.

(iv) Si $(\tau_n)$ est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \uparrow \tau_n$ est aussi un temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{\tau_n-}.$$

(iv) Si $(\tau_n)$ est une suite décroissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \downarrow \tau_n$ est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}.$$

(v) Si $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\sup_{n\geq 1} \tau_n$ est un temps d'arrêt.

(vi) Si $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+}$ alors $\mathscr{G}_\tau = \mathscr{F}_{\tau+}$.

**Exercice 2** Soit $M = (M_t, \ t \geq 0)$ une sous-martingale. Soit $(\mathscr{G}_t)$ une sous-filtration [1] de $(\mathscr{F}_t)$. Montrer que [2] $N_t := \mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{G}_t)$, $t \geq 0$, est une $(\mathscr{G}_t)$-sous-martingale.

**Exercice 3** Soit $M = (M_t, \ t \geq 0)$ une martingale telle que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

(i) Soit $t \geq 0$ fixé et $\xi_n := \mathbb{E}(M_n^+ \,|\, \mathscr{F}_t)$, $n \geq t \geq 0$. Montrer que si $n \geq m \geq t$ alors p.s. $\xi_n \geq \xi_m$. Montrer que $\mathbb{E}(M_n^+ \,|\, \mathscr{F}_t)$ converge (lorsque $n \to \infty$) p.s. vers une variable aléatoire réelle, notée $X_t$.

(ii) Montrer que $(X_t, \ t \geq 0)$ est une martingale.

(iii) Montrer que $M$ s'écrit comme différence de deux martingales positives.

1. C'est-à-dire, une filtration telle que $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$, $\forall t \geq 0$.
2. En particulier, toute (sous-)martingale est une (sous-)martingale par rapport à sa filtration canonique.

**Exercice 4** Soit $M := (M_t,\, t \in [0,\, 1])$ une sous-martingale telle que $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_1)$. Montrer que $M$ est une martingale.

**Exercice 5** Soit $M$ une martingale continue à droite. Soit $t \geq 0$. Montrer que $M_{t+\varepsilon} \to M_t$ (lorsque $\varepsilon \downarrow 0$) dans $L^1$.

**Exercice 6** (Dans cet exercice, on ne met pas les "conditions habituelles" sur la filtration.) Montrer que toute martingale continue est également une $(\mathscr{F}_{t+})$-martingale.

**Exercice 7** Soit $\xi$ une variable aléatoire réelle. Soit $M_t := \mathbb{P}(\xi \leq t \,|\, \mathscr{F}_t)$. Montrer que $(M_t,\, t \geq 0)$ est une sous-martingale.

**Exercice 8** Soit $\tau$ un temps d'arrêt et $(M_t,\ t \geq 0)$ une martingale continue à droite et uniformément intégrable. Montrer que $(M_{\tau \wedge t},\ t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

**Exercice 9** (i) Soit $(M_t)$ une martingale continue et positive, telle que $M_t \to 0$, p.s. ($t \to \infty$). Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x \,|\, \mathscr{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x}$, p.s.

(ii) Soit $B$ un mouvement brownien. Calculer la loi de $\sup_{t \geq 0}(B_t - t)$.

*Dans les exercices suivants, $B$ est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien.*

**Exercice 10** Soient $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt bornés. Montrer que $\mathbb{E}[(B_\tau - B_\sigma)^2] = \mathbb{E}(B_\tau^2) - \mathbb{E}(B_\sigma^2) = \mathbb{E}(\tau - \sigma)$.

**Exercice 11** Soient $a > 0$ et $b > 0$.

(i) Soit $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ ou } B_t = b\} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$. En étudiant $M_t := \mathrm{sh}(\theta(B_t + a)) \exp(-\frac{\theta^2}{2} t)$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda \tau_{a,b}}\right] = \frac{\mathrm{ch}(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}{\mathrm{ch}(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}, \qquad \lambda \geq 0.$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}$ et que $\mathbb{P}(\tau_b > \tau_{-a}) = \frac{b}{a+b}$.

(iii) Quelle est la loi de $\sup_{0 \leq t \leq \tau_{-1}} B_t$ ?

**Exercice 12** Soient $\gamma \neq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ trois réels. Posons $\tau_x := \inf\{t > 0 : B_t + \gamma t = x\}$, $x = -a$ ou $b$. Calculer $\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b)$.

Indication : on pourra considérer la martingale $\exp\{-2\gamma(B_t + \gamma t)\}$.

**Exercice 13 (première identité de Wald)** Soit $\tau$ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\tau) < \infty$. Montrer que $B_\tau$ est intégrable et $\mathbb{E}(B_\tau) = 0$.

**Exercice 14 (deuxième identité de Wald)** Soit $\tau$ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\tau) < \infty$. Montrer que $B_\tau$ est de carré-intégrable et $\mathbb{E}(B_\tau^2) = \mathbb{E}(\tau)$.