

Chapitre 0. Préréquis

Sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $x > 0$ un réel strictement positif.

- (i) Montrer que $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$.
- (ii) Montrer que¹ $\mathbb{P}(\xi > x) \leq e^{-x^2/2}$.

Exercice 2 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

- (i) Calculer $\mathbb{E}(\xi^4)$ et $\mathbb{E}(|\xi|)$.
- (ii) Calculer $\mathbb{E}(e^{a\xi})$, $\mathbb{E}(\xi e^{a\xi})$ et $\mathbb{E}(e^{a\xi^2})$, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel.
- (iii) Soit $b \geq 0$ un réel positif. Soit η une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendante de ξ . Montrer que $\mathbb{E}(e^{b\xi^2}) = \mathbb{E}(e^{\lambda\xi\eta})$, où $\lambda := (2b)^{1/2}$.

Exercice 3 Soient ξ, ξ_1, ξ_2, \dots des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n , ξ_n suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en loi vers ξ . Montrer que ξ suit une loi gaussienne.

Exercice 4 Soient ξ, ξ_1, ξ_2, \dots des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n , ξ_n suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en probabilité vers ξ . Montrer que ξ_n converge dans L^p , pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 5 Soit (ξ, η, θ) un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^3 . On suppose $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) = 0$, $\sigma_\xi^2 := \mathbb{E}(\xi^2) > 0$ et $\sigma_\eta^2 := \mathbb{E}(\eta^2) > 0$.

- (i) Montrer que $\mathbb{E}(\theta | \xi, \eta) = \mathbb{E}(\theta | \xi) + \mathbb{E}(\theta | \eta) - \mathbb{E}(\theta)$.
- (ii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi | \xi\eta) = 0$.
- (iii) Montrer que $\mathbb{E}(\theta | \xi\eta) = \mathbb{E}(\theta)$.

Exercice 6 Soient ξ et η deux variables aléatoires intégrables, et soit \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} .

1. Plus tard, on verra que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\eta | \mathcal{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(\eta \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\eta | \mathcal{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.

Exercice 7 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles, indexée par un ensemble non vide A quelconque. On rappelle la définition suivante : $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha| \mathbf{1}_{(|X_\alpha| > K)}) = 0.$$

Montrer que $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_t| \mathbf{1}_B) < \varepsilon$.

Exercice 8 Soit ξ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$. Montrer que la famille $(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}), \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ sous-tribu})$ est uniformément intégrable.

Exercice 9 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|^p) < \infty$. Montrer que $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

Exercice 10 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle Y telle que $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha| \leq Y$ p.s. Montrer que $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.²

Exercice 11 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles intégrables. Montrer qu'elle est uniformément intégrable s'il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = \infty$ telle que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}[h(|X_\alpha|)] < \infty$.

Exercice 12 Soit $(X_t, t \geq 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par \mathbb{R}_+ , et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. On suppose que $X_t \rightarrow X_\infty$ en probabilité (quand $t \rightarrow \infty$), et que $(X_t, t \geq 0)$ est uniformément intégrable. Montrer que $X_t \rightarrow X_\infty$ dans L^1 .

Exercice 13 Soit $(X_n, n \geq 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par \mathbb{Z}_+ , et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \rightarrow X_\infty$ dans L^1 (quand $n \rightarrow \infty$) si et seulement si $X_n \rightarrow X_\infty$ en probabilité et $(X_n, n \geq 0)$ est uniformément intégrable.

2. En particulier, si $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha|$ est mesurable et intégrable, alors $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.