EXAMEN 22 janvier 2016
Calcul stochastique et processus de diffusion
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires

Durée 3h.

Dans tout le sujet, nous considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée avec sa dérivée f' et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Exercice 1. (Développements de Taylor aléatoires) Soient $T \geq 0$ et $\alpha \in]0, 1/2[$ fixés.

(1) Montrer qu'il existe une v.a. $K_1 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $t, s \in [0, T]$

$$|F(B_t) - F(B_s)| \leq K_1 |t - s|^{\alpha},$$

$$|F(B_t) - F(B_s) - f(B_s)(B_t - B_s)| \leq K_1 |t - s|^{2\alpha}.$$

(2) Montrer qu'il existe une v.a. $K_2 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\left| \int_s^t f(B_u)\, \mathrm{d}B_u \right| \leq K_2 |t - s|^{\alpha}, \qquad \left| \int_s^t f(B_u)\, \mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t - B_s) \right| \leq K_2 |t - s|^{2\alpha}.$$

On pourra utiliser la formule d'Ito appliquée à $F(B_t)$.

(3) On suppose que f' est de classe C^1 avec dérivée f'' bornée. Montrer qu'il existe une v.a. $K_3 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\left| \int_s^t (B_u - B_s)\, \mathrm{d}B_u \right| \leq K_3 |t - s|^{2\alpha},$$

$$\left| \int_s^t f(B_u)\, \mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s) \int_s^t (B_u - B_s)\, \mathrm{d}B_u \right| \leq K_3 |t - s|^{3\alpha}.$$

On pourra utiliser une formule d'Ito appliquée au processus $[s, T] \ni t \mapsto (B_t - B_s)^2$.

(4) Soit maintenant $\alpha \in]1/3, 1/2[$. Montrer qu'il existe un seul processus $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}$ tel que p.s. pour une v.a. p.s. finie $C \geq 0$ et tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\gamma_0 = 0, \qquad \left| \gamma_t - \gamma_s - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s) \int_s^t (B_u - B_s)\, \mathrm{d}B_u \right| \leq C |t - s|^{3\alpha}.$$

Solution de l'exercice 1. Soient $T \geq 0$ et $\alpha \in]0, 1/2[$ fixés, $L_1 := \sup |f| < +\infty$ et $L_2 := \sup |f'| < +\infty$.

(1) Puisque $F' = f$ et

$$|F(x) - F(y)| \leq L_1\, |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

alors pour $x = B_t$ et $y = B_s$ nous avons

$$|F(B_t) - F(B_s)| \leq L_1\, |B_t - B_s|.$$

Par le critère de Kolmogorov il existe une v.a. $C_\alpha \geq 0$ finie p.s. telle que p.s.

$$|B_t - B_s| \leq C_\alpha\, |t - s|^{\alpha}, \qquad t, s \in [0, T].$$

Nous obtenons donc la première formule. De façon analogue, puisque

$$|F(x) - F(y) - f(y)(x-y)| \le L_2 \frac{(x-y)^2}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

nous obtenons la deuxième formule.

(2) On utilise la formule d'Ito appliquée à $F(B_t)$ et l'on obtient

$$F(B_t) = F(B_s) + \int_s^t f(B_u)\,\mathrm{d}B_u + \frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)\,\mathrm{d}u, \qquad 0 \le s \le t \le T,$$

$$\left|\frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)\,\mathrm{d}u\right| \le \frac{L_2}{2}\,|t-s| = \frac{L_2}{2}\,|t-s|^{1-2\alpha}\,|t-s|^{2\alpha} \le \frac{T^{1-2\alpha}L_2}{2}\,|t-s|^{2\alpha}.$$

Le point 2 suit alors du point 1 car

$$\begin{aligned}&\left|\int_s^t f(B_u)\,\mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t - B_s)\right|\\ &= \left|F(B_t) - F(B_s) - f(B_s)(B_t-B_s) - \frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)\,\mathrm{d}u\right|\\ &\le |F(B_t) - F(B_s) - f(B_s)(B_t - B_s)| + \left|\frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)\,\mathrm{d}u\right|.\end{aligned}$$

(3) Par la formule d'Ito, pour tous $0 \le s \le t \le T$

$$(B_t - B_s)^2 = 2\int_s^t (B_u - B_s)\,\mathrm{d}B_u + t - s.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t (B_u - B_s)\,\mathrm{d}B_u\right| &\le (B_t - B_s)^2 + |t-s| = (B_t-B_s)^2 + |t-s|^{1-2\alpha}\,|t-s|^{2\alpha},\\ &\le \left(C_\alpha^2 + T^{1-2\alpha}\right)|t-s|^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Si f' est de classe C^1 avec dérivée f'' bornée et $L_3 := \sup|f''|$ alors

$$\left|F(x) - F(y) - f(y)(x-y) - f'(y)\frac{(x-y)^2}{2}\right| \le L_3\,\frac{(x-y)^3}{6}, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

et à nouveau par la formule d'Ito appliquée à $t \mapsto F(B_t)$

$$\begin{aligned}&\left|\int_s^t f(B_u)\,\mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t-B_s) - f'(B_s)\int_s^t (B_u - B_s)\,\mathrm{d}B_u\right|\\ &= \left|F(B_t) - F(B_s) - f(B_s)(B_t-B_s) - f'(B_s)\frac{(B_t-B_s)^2}{2} - \frac{1}{2}\int_s^t (f'(B_u) - f'(B_s))\,\mathrm{d}u\right|\\ &\le \frac{L_3 C_\alpha^3}{6}\,|t-s|^{3\alpha} + \frac{L_3 C_\alpha}{2}\int_s^t |u-s|^\alpha\,\mathrm{d}s = \frac{L_3C_\alpha^3}{6}\,|t-s|^{3\alpha} + \frac{L_3 C_\alpha}{2(\alpha+1)}\,|t-s|^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Puisque $\alpha < 1/2$ nous avons que $\alpha + 1 > 3\alpha$ et cela permet de conclure.

(4) Soit $\alpha \in]1/3, 1/2[$. Nous savons que $\gamma_t := \int_0^t f(B_u)\,\mathrm{d}B_u$ a la propriété souhaitée. Soit $\bar\gamma$ une autre fonction avec la même propriété. Alors p.s. la différence $h := \gamma - \bar\gamma$ satisfait

$$h_0 = 0, \qquad |h_t - h_s| \le C|t-s|^{3\alpha}, \qquad 0 \le s \le t \le T.$$

Puisque $3\alpha > 1$, en divisant par $|t-s|$ et en faisant tendre $s \to t$ on obtient $h'_t = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et puisque $h_0 = 0$ cela implique $h \equiv 0$.

L'intérêt de cet exercice est de donner une charactérisation de l'intégrale stochastique différente de celle du cours.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que

$$M_t := F(x+B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+B_s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0,$$

est une martingale.

(2) Soit pour $t \ge 0$

$$D_t := \exp\left(F(x+B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+B_s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^t (f(x+B_s))^2\,\mathrm{d}s\right)$$

et $\mathbb{Q}_T|_{\mathscr{F}_T} := D_T \cdot \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$ pour tout $T \ge 0$. Montrer que $(D_t)_{t\ge 0}$ est une martingale et que $\mathbb{Q}_T$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{F}_T$ pour tout $T \ge 0$.

(3) Montrer que sous $\mathbb{Q}_T$ le processus $(x+B_t)_{t\in[0,T]}$ est solution faible d'une EDS pour laquelle on a unicité trajectorielle.

(4) Quelle est la loi de $(x+B_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}_T$?

Solution de l'exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Par la formule d'Ito

$$M_t := F(x+B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+B_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f(x+B_s)\,\mathrm{d}B_s, \qquad t \ge 0,$$

est une martingale locale telle que $\langle M\rangle_t = \int_0^t f^2(x+B_s)\,\mathrm{d}s$ est borné donc dans L^1 et, par un résultat du cours, M est une vraie martingale de plus dans L^2.

(2) On voit que pour $t \ge 0$

$$D_t := \exp\left(F(x+B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+B_s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^t (f(x+B_s))^2\,\mathrm{d}s\right)$$

est la martingale locale exponentielle $\mathscr{E}(M)_t$. D'autre côté $\langle M\rangle_t = \int_0^t (f(x+B_s))^2\,\mathrm{d}s$ est une variable bornée et donc par le Théorème 6.5.9 du poly D est une vraie martingale et $\mathbb{E}[D_t] = 1$ pour tout $t \ge 0$.

(3) Par le Théorème de Girsanov, sous $\mathbb{Q}_T$ le processus

$$\hat{B}_t := B_t - \langle M, B\rangle_t = B_t - \int_0^t f(x+B_s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T]$$

est une martingale locale continue avec crochet $\langle \hat{B} \rangle_t = \langle B \rangle_t = t$ et par le théorème de Lévy c'est donc un MB. Nous avons donc que

$$x + B_t = x + \int_0^t f(x + B_s)\,\mathrm{d}s + \hat{B}_t, \qquad t \in [0, T].$$

Comme f est une fonction Lipschitzienne (puisque sa dérivée f' est bornée) cette EDS satisfait l'unicité trajectorielle par un théorème du cours.

(4) Si $\Phi : C([0, T]) \to \mathbb{R}$ est borélienne bornée, alors par l'expression explicite de D_T

$$\mathbb{E}[\Phi(x + B_t, t \in [0, T])\, D_T] =$$
$$= \int_{C([0,T])} \Phi(X_t, t \in [0, T])\, G_T(X)\, \mathrm{d}\mathbb{W}_x$$

où $\mathbb{W}_x$ est la loi de $(x+B_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{P}$, X est le processus canonique et $G_T : C([0, T]) \to \mathbb{R}$ est

$$G_T(X) := \exp\left(F(X_T) - F(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^T f'(X_s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^T (f(X_s))^2\,\mathrm{d}s \right).$$

La loi cherchée est donc $G_T \cdot \mathbb{W}_x$.

Exercice 3. Soit $x > 0$ et $B^{(3)} = (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. On pose $\rho_t := |\bar{x} + B_t^{(3)}|$, $t \geq 0$, où $\bar{x} := (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(1) Montrer que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est une solution faible de l'EDS

$$\rho_t = x + \int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s + \beta_t, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

où β est un MB standard. (On pourra passer par l'EDS satisfaite par ρ_t^2 ou faire un calcul direct).

(2) Montrer que le processus

$$M_t := -\int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}\beta_s, \qquad t \geq 0$$

définit une martingale locale. Si $D := \mathscr{E}(M)$ est la martingale locale exponentielle de M, montrer que p.s.

$$D_t = \mathscr{E}(M)_t = \frac{x}{\rho_t}, \qquad t \geq 0.$$

(3) Montrer que D^{τ_ε} est une vraie martingale, où $\tau_\varepsilon := \inf\{t > 0 : \rho_t = \varepsilon\}$ pour $0 < \varepsilon < x$.

(4) Soit $T \geq 0$ et $\mathbb{Q}_T^\varepsilon|_{\mathscr{F}_T} := D_T^{\tau_\varepsilon} \cdot \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$. Montrer que $(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon})_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ et en calculer le crochet.

(5) Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB standard indépendant de $B^{(3)}$ et

$$\gamma_t^\varepsilon := \rho_{t\wedge\tau_\varepsilon} + W_t - W_t^{\tau_\varepsilon}, \qquad t \geq 0.$$

Montrer que γ^ε sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ est un MB standard issu de x et p.s. $\tau_\varepsilon = \inf\{t > 0 : \gamma_t^\varepsilon = \varepsilon\}$.

(6) Montrer que pour toute fonctionnelle $\Phi : C([0,T]) \to \mathbb{R}$ borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t \in [0,T])\frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t \in [0,T])\right]$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t \in [0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x + B_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}{x}\,\Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t \in [0,T])\right]$$

où $\sigma_\varepsilon := \inf\{t > 0 : x + B_t = \varepsilon\}$.

(7) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_t, t \in [0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x + B_T}{x}\mathbb{1}_{(\inf_{[0,T]}(x+B)>0)}\,\Phi(x + B_t, t \in [0,T])\right].$$

Comparer avec l'exercice 2 et interpréter le résultat.

Solution de l'exercice 3. Soit $x > 0$ et $B^{(3)} = (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. On pose $\rho_t := |\bar{x} + B^{(3)}_t|$, $t \geq 0$, où $\bar{x} := (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(1) On sait par un résultat du cours que pour tout $t \geq 0$

$$\rho_t^2 = x^2 + 2\int_0^t \rho_s\,\mathrm{d}\beta_s + 3t$$

où

$$\beta_t := \int_0^t \frac{1}{\rho_s}\sum_{i=1}^3 (\bar{x}_i + B^i_s)\,\mathrm{d}B^i_s, \qquad t \geq 0,$$

est un MB standard. On sait aussi par un autre résultat du cours que p.s. $\rho_t > 0$. La fonction $]0,+\infty[\ni z \mapsto \sqrt{z}$ est de classe C^2 et nous pouvons donc appliquer la formule d'Ito et trouver que

$$\begin{aligned}\rho_t &= x + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\rho_s^2}}\,(2\rho_s\,\mathrm{d}\beta_s + 3\,\mathrm{d}u) - 2\,\frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{(\rho_s^2)^{3/2}}\,(\rho_s)^2\,\mathrm{d}s \\ &= x + \int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s + \beta_t.\end{aligned}$$

(2) Par continuité $\inf_{[0,t]}\rho > 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$ et donc M est bien définie en tant que martingale locale. Par la formule d'Ito

$$\begin{aligned}\rho_t\,\mathscr{E}(M)_t &= x + \int_0^t \rho_s\,\mathscr{E}(M)_s\,\mathrm{d}M_s + \int_0^t \mathscr{E}(M)_s\,\mathrm{d}\rho_s + \langle \rho, \mathscr{E}(M)\rangle_t \\ &= x - \int_0^t \mathscr{E}(M)_s\,\mathrm{d}\beta_s + \int_0^t \mathscr{E}(M)_s\left(\frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s + \,\mathrm{d}\beta_s\right) - \int_0^t \mathscr{E}(M)_s\frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s = x.\end{aligned}$$

Un calcul alternatif est le suivant

$$\begin{aligned}-\log\rho_t &= -\log x - \int_0^t \frac{1}{\rho}\left(\mathrm{d}\beta_s + \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}u\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\rho_s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= -\log x - \int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}\beta_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\rho_s^2}\,\mathrm{d}s = -\log x + M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t.\end{aligned}$$

Nous avons donc p.s. pour tout $t \geq 0$

$$\frac{x}{\rho_t} = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right) = \mathscr{E}(M)_t.$$

Puisque M est une martingale locale, $D := \mathscr{E}(M)$ l'est aussi par un théorème du cours.

(3) Puisque $\sup_t |D_t^{\tau_\varepsilon}| \leq x/\varepsilon$, D^{τ_ε} est une martingale locale bornée et donc une vraie martingale.

(4) Par le théorème de Girsanov, $(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon})_{t\in[0,T]}$ est sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ une semi-martingale. D'autre côté par le même théorème le processus

$$\hat{\beta}_t := \beta_t^{\tau_\varepsilon} - \langle M, \beta^{\tau_\varepsilon}\rangle_t = \beta_{t\wedge\tau_\varepsilon} + \int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s = \rho_{t\wedge\tau_\varepsilon} - x$$

est une martingale locale avec crochet $t \mapsto t\wedge\tau_\varepsilon$. Puisque ce crochet est borné pour tout $t \geq 0$ par t, la martingale locale est une vraie martingale dans L^2.

(5) Si $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB standard indépendant de $B^{(3)}$ et

$$\gamma_t^\varepsilon - x := \rho_{t\wedge\tau_\varepsilon} - x + W_t - W_t^{\tau_\varepsilon} = \int_0^t \mathbb{1}_{]0,t\wedge\tau_\varepsilon]}(s)\,\mathrm{d}\hat{\beta}_s + \int_0^t \mathbb{1}_{]t\wedge\tau_\varepsilon,t]}(s)\,\mathrm{d}W_s$$

alors, sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$, γ_t^ε est la somme de deux martingales locales orthogonales et donc

$$\langle\gamma^\varepsilon\rangle_t = t\wedge\tau_\varepsilon + \mathbb{1}_{(t\geq\tau_\varepsilon)}(t-\tau_\varepsilon) = t, \qquad t \geq 0.$$

Par le théorème de Lévy alors $\gamma^\varepsilon - x$ est un MB standard sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$. Il est évident que $\tau_\varepsilon = \inf\{t > 0 : \gamma_t^\varepsilon = \varepsilon\}$ car $\gamma_t^\varepsilon = \rho_t$ pour tout $t \in [0,\tau_\varepsilon]$.

(6) Par les points précédents, pour toute fonctionnelle $\Phi : C([0,T]) \to \mathbb{R}$ borélienne bornée

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])\frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\right] &= \mathbb{E}\left[\Phi(\gamma^\varepsilon_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])\frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t\in[0,T])\right]\end{aligned}$$

et si $\Psi(X) := \Phi(X)\frac{X_0}{X_T}\mathbb{1}_{(X_T>0)}$ alors

$$\mathbb{E}\left[\Psi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x + B_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}{x}\Psi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t\in[0,T])\right]$$

où $\sigma_\varepsilon := \inf\{t > 0 : x + B_t = \varepsilon\}$.

(7) Sous avons par la définition de σ_ε

$$x + B_{T\wedge\sigma_\varepsilon} = (x + B_T)\mathbb{1}_{(\inf_{[0,T]}(x+B)>\varepsilon)} + \varepsilon\mathbb{1}_{(\inf_{[0,T]}(x+B)\leq\varepsilon)}$$

et cela permet de conclure en passant à la limite en $\varepsilon \to 0$ si Φ est continue.

On peut comparer toutes ces formules avec celles de l'exercice 2 : ici $f(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{(x>0)}$, $F(x) = \log x\mathbb{1}_{(x>0)}$, $D_t = x/\rho_t$. Cependant f ici n'est ni bornée ni Lipschitzienne, et les résultats de l'exercice 2 ne s'applique pas directement ; par exemple dans l'exercice 2 les deux mesures $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}_T$ sont équivalentes, alors que ici la présence de la fonction indicatrice de $\{\inf_{[0,T]}(x+B) \geq 0\}$ montre que $\mathbb{Q}_T \ll \mathbb{P}$ mais pas l'inverse.